MATHEMATIQUES 2

Durée 4 h

On se propose, dans ce problème, d'étudier la convergence de certaines séries dites p-séries alternées, de calculer leur somme à partir de développements en série de Fourier ou en série entière et d'étudier quelques propriétés d'une fonction obtenue comme somme d'une 2-série alternée.

Etant donné un entier naturel non nul p, une série $\sum u_n$ sera dite une p-série alternée s'il existe un entier naturel n_0 et une suite réelle (a_n) de signe constant, tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$$

où E désigne la fonction partie entière. Avec cette définition une 1-série alternée sera donc une série alternée à partir d'un certain rang.

PARTIE I — Préliminaires sur les p-séries alternées

I-1 Sur les 1-séries alternées (ou séries alternées)

I-1-1 Etant donnée une série alternée $\sum (-1)^n a_n$ (avec a_n de signe constant) énoncer sans démonstration une condition suffisante pour que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(n \geq 1)$?

I-1-2 Quelle est la nature des séries

I-1-2 -1 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $(n \geq 2)$? I-1-2 -2 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $(n \geq 2)$?

I-2 Sur les p-séries alternées, (où p désigne un entier fixé supérieur ou égal à deux).

Pour simplifier, on suppose dans les questions I-2-1, I-2-2, I-2-3 que n_0 est égal à zéro. On considère une p-série alternée $\sum u_n$ et on lui associe la série $\sum v_q$ avec

$$v_q = \sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} u_n \quad .$$

I-2-1 Montrer que $\sum v_q$ est une série alternée.

I-2-2 On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Montrer, en étudiant les sommes partielles de chacune des deux séries, que la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à la convergence de la série $\sum v_q$.

I-2-3 On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$|u_{n+1}| \leq |u_n|$ pour tout $n \geq n_1$.

Quelle est la nature de la série $\sum v_q$?

I-2-4 On considère la série $\sum u_n$ avec

$u_n = 0$ pour $0 \leq n < 2p$,

$$u_n = \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} \quad \text{pour tout } n \geq 2p.$$

Expliciter v_q ; en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

I-2-5 On considère la série $\sum u_n$ avec

$u_n = 0$ pour $0 \leq n < 2p$,

$$u_n = \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right)+(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} \quad \text{pour tout } n \geq 2p.$$

Expliciter v_q ; en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

PARTIE II

Dans cette partie, on établit le développement en série de Fourier (respectivement en série entière) de certaines fonctions réelles d'une variable réelle.

II-1 On désigne par f_1 la fonction 2π - périodique, impaire, définie sur $[0, \pi]$ par $f_1(x) = x(\pi - x)$.

II-1-1 Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 sur $\mathbb{R}$.

II-1-2 Déterminer les coefficients de Fourier réels de f_1.

II-1-3 La fonction f_1 est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ? (Le candidat justifiera sa réponse).

II-2 Soit b un nombre réel fixé, $b \in]0, \pi[$; on considère la fonction f_2, 2π-périodique, paire, définie sur $[0, \pi]$ par

$f_2(x) = 1$ si $x \in [0, b[$
$f_2(b) = \frac{1}{2}$
$f_2(x) = 0$ si $x \in]b, \pi]$.

II-2-1 Etudier la continuité et la dérivabilité de f_2 sur $\mathbb{R}$.

II-2-2 Déterminer les coefficients de Fourier réels de f_2.

II-2-3 La fonction f_2 est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ? (Le candidat justifiera sa réponse).

II-3 On considère les fonctions f_3 et g_3 définies sur $[-1, 1]$ par :

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right) \quad \text{si } x \in]-1, 1[$$

et $f_3(1) = -f_3(-1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

$$g_3(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \ .$$

II-3-1 Etudier la continuité et la dérivabilité de f_3 sur $[-1, 1]$ et expliciter f'_3 sur son ensemble de définition.

II-3-2 Ecrire le développement en série entière de la fonction g_3 ; préciser le rayon de convergence R de la série obtenue.

II-3-3 Ecrire le développement en série entière de la fonction f_3 sur $]-R, R[$. La série entière obtenue est-elle convergente pour $x = R$? (resp. $x = -R$?)

Dans la suite du problème, on admettra que la convergence de cette série entière est uniforme sur son ensemble de convergence.

PARTIE III

On se propose de calculer la somme de certaines 2-séries alternées.

III-1 Calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{(2n+1)^3}$.

Déduire de **II-1** la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{4}\right]}{(2n+1)^3}$ puis la valeur de S.

III-2 On se propose de calculer par deux méthodes différentes la valeur de

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{2n+1}$$

III-2-1 **Première méthode** à partir d'un développement en série de Fourier.

III-2-1-1 Déduire de **II-2** d'une part la convergence de la série $\Sigma \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n}$ $(n \geq 1)$ et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n}$;

d' autre part la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

III-2-1-2 Montrer qu'il existe deux nombres réels λ et μ que l'on explicitera tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{2n+1} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

III-2-1-3 En déduire la valeur de T.

Deuxième méthode.

III-2-2 Retrouver la valeur de T en utilisant le développement en série entière de f_3 obtenu au **II-3.**

PARTIE IV

Etude d'une fonction obtenue comme somme d'une 2-série alternée.

On considère la 2-série alternée $\Sigma\, u_n(x)$ avec pour $n \geq 0$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{(2n+1)^x}$; on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des x réels pour lesquels cette série converge et par φ la fonction définie sur $\mathcal{E}$ par

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{(2n+1)^x} \quad .$$

IV-1 Expliciter $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $\varphi(1)$ et $\varphi(3)$.

IV-2-1 Déterminer le signe de $\varphi(x)$ pour x appartenant à $\mathcal{E}$.

IV-2-2 La fonction φ est-elle bornée sur $\mathcal{E}$?

IV-3 On considère la fonction Δ définie pour $x \in]1, +\infty[$ par

$$\Delta(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

IV-3-1 Quelle est la limite de $\Delta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$? (on pourra par exemple comparer $\Delta(x)$ avec une intégrale).

IV-3-2 Comparer pour $x > 1$, les deux nombres $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{(2n+1)^x}\right|$ et $\Delta(x)$; en déduire la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

IV-4 Montrer qu'il existe A, constante réelle positive que l'on explicitera, telle que pour tout x appartenant à $\mathcal{E}$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}$ on ait l'inégalité

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{k}{2}\right)}}{(2k+1)^x}\right| \leq \frac{A}{(2n+1)^x}$$

IV-5 La fonction φ est-elle continue sur $\mathcal{E}$?